ΠΡΟΤΥΠΟ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΑΝΔΡΕΑΣ ΚΑΛΟΔΙΚΗΣ

Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ.111)

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις **f, g** είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

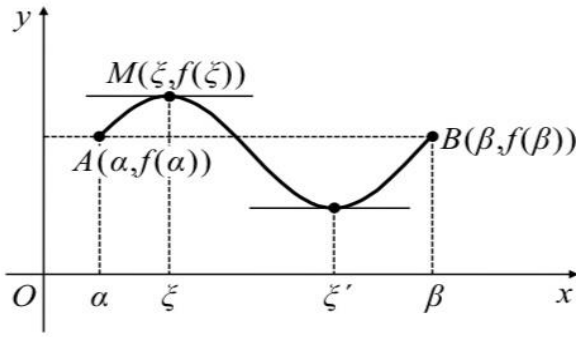
Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ.104)

Η **f** είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 128)
Διατύπωση
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$



Γεωμετρική ερμηνεία
Εφόσον υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει **ένα, τουλάχιστον**, σημείο $M(\xi,f(\xi))$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Α4. α) **Λ** β) **Λ** γ) **Λ** δ) **Σ** ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται η $g\circ h$ πρέπει:

$$\begin{cases} x\in D_h \\ h(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x>0$$

Άρα $D_{g\circ h}=(0,+\infty)$

Ο τύπος της είναι:

$$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-x^2}{x}$$

Β2. i) Είναι $f(x)=\frac{4-x^2}{x}=\frac{4}{x}-x,\ x>0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$f'(x)=-\frac{4}{x^2}-1<0$ για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

ii) Είναι:

$$\pi>e\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\pi)<f(e)\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow e(4-\pi^2)<\pi(4-e^2)\overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow}\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$$

Β3. Για κατακόρυφη ασύμπτωτη ψάχνουμε στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}\cdot(4-x^2)\right]=+\infty$$

Γιατί $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim_{x\to0^+}(4-x^2)=4>0$

Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Πλάγια Ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=-1=\lambda$$

$$\text{και }\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2+x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}\right)=0=\beta$$

Άρα η ευθεία $y=-x$ είναι Πλάγια Ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Β4. Έχουμε $|\sigma\upsilon\nu(x^2+1)|\le1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έτσι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(x^2+1)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{|f(x)|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu(x^2+1)}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$

Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=0$ γιατί $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

Και $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)=0$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)}{f(x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει

$$\int_2^3 xf(x)\,dx=1\Leftrightarrow\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3(1+\alpha x)\,dx=1\Leftrightarrow[x]_2^3+\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow$$

$$1+\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow\alpha\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)=0\Leftrightarrow\alpha=0$$

Γ2. i) Είναι

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=-1$$

και

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x}=-1$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$.

Συνεπώς ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2$$

Αν είναι ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ ισχύει

$\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\omega=\dfrac{3\pi}{4}$ (αφού $0\le\omega<180^\circ$)

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x-3<0$

(αφού $x<1\Leftrightarrow2x<2\Leftrightarrow2x-3<-1$)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$

Και $f'(1)=-1$

Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) και ισχύει $f'(x)<0$ στο $\mathbb{R}$.

Τότε η f είναι $1-1$ (ως γνησίως μονότονη)

Αφού f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

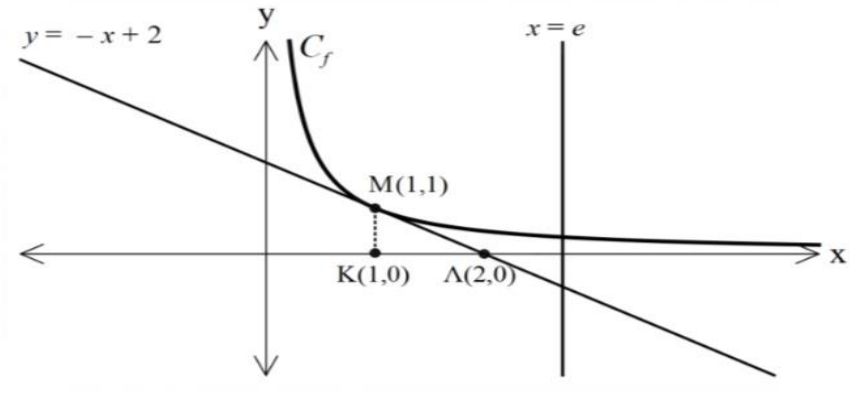
Και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Γ4. Η $\varepsilon: y=-x+2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Lambda(2,0)$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$.

Επομένως η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(1,1)$.



<u>1ος τρόπος</u>

$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)dx-(K\Lambda M)=\int_1^e\frac{1}{x}dx-\frac{(K\Lambda)\cdot(KM)}{2}=[\ln x]_1^e-\frac{1}{2}=1-0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \tau.\ \mu ov.$$

<u>2ος τρόπος</u>

$$E(\Omega)=\int_1^2\left(f(x)-y\right)dx+\int_2^e f(x)dx$$

Όμως $\int_1^2\left(f(x)-y\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=\ln 2+2-4-\left(0+\frac{1}{2}-2\right)=\ln 2-\frac{1}{2}$

$$\int_2^e f(x)dx=\int_2^e\frac{1}{x}dx=[\ln x]_2^e=1-\ln 2$$

Επομένως

$$E(\Omega)=\ln 2-\frac{1}{2}+1-\ln 2=\frac{1}{2}\ \tau.\ \mu ov.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}\ \text{για κάθε}\ x\in(0,1)\cup(1,2).$$

Η f είναι συνεχής στο D_f άρα

Είναι $\lim\limits_{x\to1}g(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(g(x)\cdot(x-1)\right)=1\cdot0=0.$

Όμως $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)-2x\right)=\ln(2-1)-1+\kappa-2=\kappa-3.$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

$\kappa-3=0\Rightarrow\kappa=3$

Δ2. Έχουμε για κάθε $x\in(0,2)$

$$f'(x)=\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

Είναι

$$f'(x)=0 \overset{x\in(0,2)}{\Leftrightarrow} x=1$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow 1<x<2$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της f

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_1=(0,1]$ οπότε $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$ διότι

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to0^+}\ln(2-x)=\ln2 \text{ και } \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

και

$$f(1)=2$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=(1,2)$ οπότε

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to2^-}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\right)=(-\infty,2)$ διότι

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to2^-}\ln(2-x)\overset{\substack{u=2-x\\2-x>0}}{=}\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty$$

και

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=2$$

Συνεπώς έχουμε ότι :

$0\in f(A_1)$ και η f γνησίως αύξουσα στο A_1 οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$

και

$0\in f(A_2)$ και η f γνησίως φθίνουσα στο A_2 οπότε υπάρχει $x_2\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

Θα αποδείξουμε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$

$1^{ος}$ τρόπος
Είναι

$$0 < x_1 < \frac{1}{3} \underset{x\in(0,1)}{\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\frac{5}{3} \text{ το οποίο ισχύει.}$$

$2^{ος}$ τρόπος
Έχουμε ότι

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(2-x_1) + 3 - \frac{1}{x_1} = 0 \Leftrightarrow \ln(2-x_1) = \frac{1}{x_1} - 3$$

Το $\ln(2-x_1) > 0$ διότι $0 < x_1 < 1 \Leftrightarrow -1 < -x_1 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2 - x_1 < 2$

Οπότε $\frac{1}{x_1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Η f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$

τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Επίσης

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$$

Τελικά η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το ξ είναι μοναδικό.

Δ4 i)

Αφού F αρχική της f θα είναι $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in (0,2)$ και όμοια, αφού G αρχική της f , άρα $G'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in (0,2)$, οπότε :

$F'(x) = G'(x) \Leftrightarrow F(x) = G(x) + c$, για κάθε $x \in (0,2)$ (1)

Από (1) για $x = x_1$: $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow G(x_1) + c = 0 \Leftrightarrow G(x_1) = -c$ (2)

Από (1) για $x = x_2$: $F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow F(x_2) = c$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3) :

$F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x$, $x \in [x_1, x_2]$

Η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών

$$\Phi(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = -x_2 F(x_2) + x_1 - x_2 \quad (4)$$

$$\Phi(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1 \quad (5)$$

Είναι $0 < x_1 < x_2 < 2$ άρα $x_1 - x_2 < 0$ και $x_2 - x_1 > 0$. Ακόμη :

$F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ γιατί :

Στο $[x_1, 1]$ είναι $f \nearrow$ οπότε για κάθε x : $x_1 < x < 1 \Rightarrow 0 = f(x_1) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x)$

Στο $[1, x_2]$ είναι $f \searrow$ οπότε για κάθε x : $1 < x < x_2 \Rightarrow f(x) > f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$

Τελικά $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και αφού F συνεχής στο $[x_1, x_2]$ θα είναι $F \nearrow$ στο $[x_1, x_2]$, οπότε :

$$x_1 < x_2 \overset{F\nearrow}{\Rightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$$

Συνεπώς :

$$(4) : \Phi(x_1) = \underset{<0}{-x_2} \underset{>0}{F(x_2)} + \underbrace{x_1 - x_2}_{<0} < 0$$

$$(5) : \Phi(x_2) = \underset{>0}{x_1} \underset{>0}{F(x_2)} + \underbrace{x_2 - x_1}_{>0} > 0$$

Άρα η συνάρτηση Φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[x_1, x_2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $\Phi(\xi) = 0$, όπως θέλαμε.

Ακόμη, είναι

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= x_1 F'(x) + x_2 G'(x) + 2 \\ &= x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 > 0 \end{aligned}$$

γιατί όπως είδαμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

Έτσι, η συνάρτηση Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$, οπότε και '$1-1$' , άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.