ΠΡΟΤΥΠΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΑΝΔΡΕΑΣ ΚΑΛΟΔΙΚΗΣ

Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ. 76)

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\zeta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\zeta,\ x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$,

αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\zeta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\zeta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\zeta=0$, οπότε $f(x_0)=\zeta$.

Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ. 155)

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
Θα λέμε ότι:
Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η $\mathbf{f'}$ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 216)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

Α4. α) **Σ** β) **Σ** γ) **Λ** δ) **Λ** ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1) Είναι $D_f = D_g \cap D_h - \{x \in D_g \cap D_h / h(x) = 0\}$.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Οπότε $D_f = [1, +\infty) - \{1\} = (1, +\infty)$ με $f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$.

Είναι $D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ με

$$r(x) = (gh)(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}.$$

Β2) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$ για κάθε $x > 1$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε και 1-1 δηλαδή αντιστρέφεται.

$$D_{f^{-1}} = f(D_f) \underset{\text{συν.}}{\overset{\downarrow}{=}} \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x)\right) = (1, +\infty) \text{ αφού}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \left[(x+1)\frac{1}{x-1}\right] = +\infty$ διότι $\lim\limits_{x \to 1^+}(x+1) = 2 > 0$

και

$\lim\limits_{x \to 1^+}(x-1) = 0$ με $x - 1 > 0$ για x κοντά στο 1 με $x > 1$, άρα $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} = f^{-1}(y).$$

Αφού $D_f = D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ συμπεραίνουμε ότι $f = f^{-1}$.

Β3) Η r είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα η C_r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1 = \lambda.$$

$$\lim_{x \to +\infty}(r(x) - \lambda x) = \lim_{x \to +\infty}\left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \beta.$$

Οπότε η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$.

Β4) Πρέπει $x > 1$ και $f(x) > 1$ που ισχύει για κάθε $x > 1$ αφού $f(D_f) = (1, +\infty)$.

Λύνουμε την εξίσωση

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4$$
$$\Leftrightarrow x^3 - x - 4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) - 4(x^2-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x=-1 \text{ ή } x=1}_{\text{απορρίπτονται}} \text{ ή } x = 4.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε θα είναι και συνεχής στο 2

Επομένως έχουμε :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right) \Leftrightarrow e^{\lambda} = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

διότι ισχύει $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

Γ2. Για $x \in (0,2)$ είναι $f'(x) = -2 < 0$, οπότε η f αφού είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in [0,2]$

Για $x \in (2,+\infty)$ είναι $f'(x) = -2x+4 = -2(x-2) < 0$, οπότε η f, αφού είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in [2,+\infty)$

Επιπλέον η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, οπότε θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

$f'(x) < 0$ στο $[0,2) \cup (2,+\infty)$ και είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, άρα (κριτήριο ακροτάτων σελ 144) είναι f γνησίως φθίνουσα στο D_f

Η f θα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = 0$ το $f(0) = 5$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f		↘	‖	↘	

Γ3. i. Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ ως συνεχής στο $[0,+\infty)$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{5-2x-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

Και

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\left[-(x-2)\right] = 0$$

Οπότε

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ άρα δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[0,3]$

ii. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ και Ε έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{\Delta E}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{0-5}{3}=-\frac{5}{3}$$

Για να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στην ΔΕ θα ψάξουμε αν υπάρχει $\xi\in(0,3)$ ώστε να ισχύει

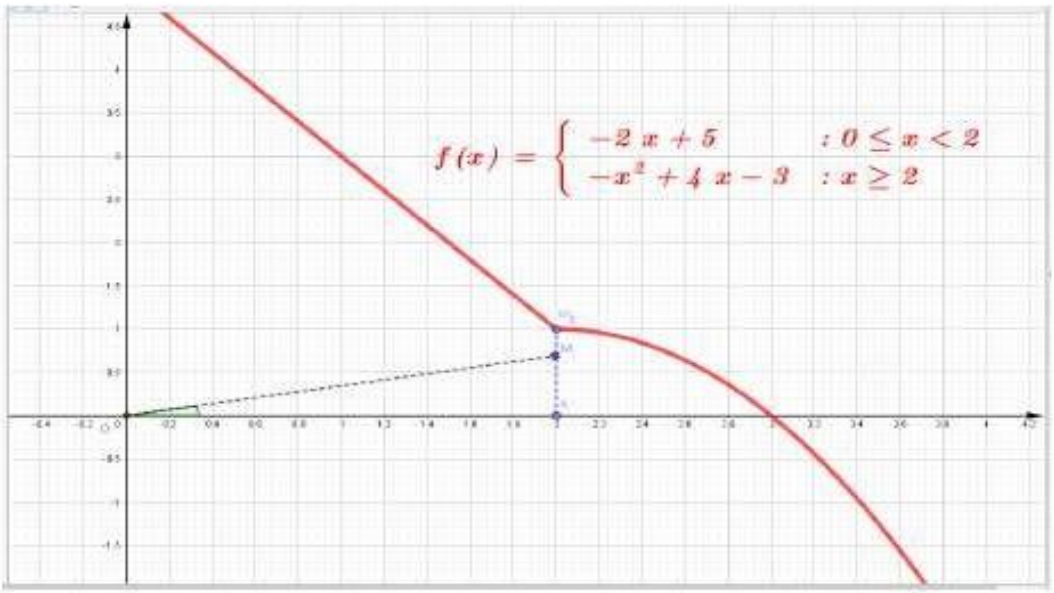
$$f'(\xi)=\lambda_{\Delta E}=-\frac{5}{3}$$

Αν $\xi\in(0,2)$ τότε $f'(\xi)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2=-\frac{5}{3}$, άτοπο

Αν $\xi\in(2,3)$ τότε $\xi\in(2,3)$, $f'(\xi)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2\xi+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2\xi=-\frac{17}{3}\Leftrightarrow \xi=\frac{17}{6}$, δεκτή.

Συνεπώς η εφαπτομένη της C_f στο $\Gamma\left(\frac{17}{6},f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ΔΕ

Γ4.



Το σημείο Μ κινείται κατακόρυφα στην AM_0 και ξεκινά από την θέση $A(2,0)$. Η ταχύτητά του είναι $\upsilon=0,5\mu/\sec$, άρα $y'(t)=0,5=(0,5t)'$, άρα $y(t)=0,5t+c$, για κάθε $t\geq 0$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $y(0)=0$ άρα $c=0$, οπότε $y(t)=0,5t$, $t\geq 0$

Τη χρονική στιγμή t_0 που το κινητό θα φτάσει στη θέση $M_0(2,1)$, γιατί η κατακόρυφος $x=2$ συναντά τη γραφική παράσταση C_f στη θέση $(2,f(2))$ ή $(2,1)$.

Έτσι,

$$y(t_0)=1\Leftrightarrow 0,5t_0=1\Leftrightarrow t_0=2\sec$$

Από το τρίγωνο ΑΟΜ είναι :

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{AM}{OA}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{y(t)}{2}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{0,5t}{2}$$

Την $t_0=2$, είναι $\varepsilon\varphi(\omega(t_0))=\frac{1}{2}$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

Άρα :

$$(\varepsilon\varphi\omega(t))' = \left(\frac{0,5t}{2}\right)' \Leftrightarrow \left(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t))\right)\omega'(t) = \frac{1}{4} \text{ και την } t_0 :$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\omega'(t_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5}\text{rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f = (0,+\infty)$ με $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

Για κάθε $x > 0$, λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$1-\ln x$		+	0	−
x^2		+	|	+
$f'(x)$		+	0	−
f(x)		↗		↘

Η f παρουσιάζει στο e, (ολικό) μέγιστο, το $f(e) = \frac{1+\alpha e}{e}$

και αφού $f((0,+\infty)) = \left(-\infty, 1+\frac{1}{e}\right]$ έχουμε ότι:

$$f(e) = 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+\alpha e}{e} = 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow 1+\alpha e = e+1 \Leftrightarrow \alpha e = e \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ επίσης

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln 2 + 1 < 0$, αφού $4 > e \Leftrightarrow \ln 4 > \ln e \Leftrightarrow 2\ln 2 > 1 \Leftrightarrow -2\ln 2 < -1 \Leftrightarrow -2\ln 2 + 1 < 0$ και

$f(1) = 1 > 0$. Οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Το x_0 είναι μοναδικό στο $\Delta_1 = (0,e)$ γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα

Επίσης στο $\Delta_2 = [e,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right] = \left(1\ ,\ 1+\frac{1}{e}\right] \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right) = 1 \text{ επειδή } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLP}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Το $0 \notin f(\Delta_2)$ άρα δεν υπάρχει άλλη ρίζα της f στο Δ_2

Οπότε η ρίζα $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι μοναδική.

Δ3. i)

Είναι:

$$f(4)=\frac{\ln 4}{4}+1=\frac{2\ln 2}{4}+1=\frac{\ln 2}{2}+1=f(2)$$

Για $x \in (0,e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$f(x)=f(4) \Leftrightarrow f(x)=f(2) \Leftrightarrow x=2$$

Για $x \in [e,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1-1$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$f(x)=f(4) \Leftrightarrow x=4$$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς δυο λύσεις τις $x_1=2$ και $x_2=4$

ii) Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \ge \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}+1 \ge \frac{\ln 2}{2}+1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(2)$$

Για $x \in (0,e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow 2 \le x \le e$$

Για $x \in [e,+\infty]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow f(x) \ge f(4) \Leftrightarrow e \le x \le 4$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in [2,4]$

Δ4.

Όταν $\frac{1}{2} \le e^x \le x_0$ ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(e^x) \le f(x_0) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \le f(e^x) \le 0$, αφού $f \nearrow (0,e]$

Και $\frac{1}{2} \le e^x \le x_0 \Leftrightarrow -\ln 2 \le x \le \ln x_0$

Όταν $x_0 \le e^x \le e$ ισχύει $f(x_0) \le f(e^x) \le f(e) \Leftrightarrow 0 \le f(e^x) \le 1+\frac{1}{e}$, αφού $f \nearrow (0,e]$

Και $x_0 \le e^x \le e \Leftrightarrow \ln x_0 \le x \le 1$

Και $\frac{1-x}{e^x} > 0$ για κάθε $x < 0$

Τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega)=-\int_{-\ln 2}^{\ln x_0} f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}dx+\int_{\ln x_0}^{0} f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}dx$$

Θέτουμε $f(e^x)=u$,τότε $f'(e^x)e^x dx=du \Leftrightarrow \frac{1-x}{e^x}dx=du$

Για $x=-\ln 2$, $u=f\left(e^{-\ln 2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

Για $x=\ln x_0$, $u=f\left(e^{\ln x_0}\right)=f(x_0)=0$

Για $x=0$, $u=f(e^0)=f(1)$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

Τότε

$$E(\Omega)=-\int_{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{0} u\,du+\int_{0}^{f(1)} u\,du=-\frac{1}{2}\left[u^2\right]_{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{0}+\frac{1}{2}\left[u^2\right]_{0}^{f(1)}=\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^2(1)$$

$$=\frac{1}{2}(-2\ln 2+1)^2+\frac{1}{2}\cdot 1=2\ln^2 2-2\ln 2+1 \text{ τ.μ.}$$