Αγ. Κωνσταντίνου 11 (Στοά Θεολόγου)
Πειραιάς
Τηλ. 2110 131 551 & 2110 131 552

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 76.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161.

Α4.

α) **Σωστό**
β) **Σωστό**
γ) **Λάθος**
δ) **Λάθος**
ε) **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$ και παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6$

Β2. Η συνάρτηση f γράφεται: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3,\ x \in \mathbb{R}$ και η παράγωγός της είναι;

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

και την ανίσωση: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 3$. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
f	↗		max	↘	min	↗	

Παρατηρούμε ότι για τη συνεχή συνάρτηση f έχουμε:

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ με
  - $f((-\infty, 0]) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, -3]$
  - και $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [-3, 1]$

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,3]$ με $f([1,3]) = [f(3), f(1)] = [-3,\ 1]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$ με $f([3,+\infty)) = \left[f(3), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-3,+\infty)$

Ισχύει ότι:

- $y = 0 \notin (-\infty,-3] = f\big((-\infty,0]\big)$ οπότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό,
- $y = 0 \in (-3,1] = f\big((0,1]\big)$ οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1]$ με $f(x_1) = 0$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών $f\big((-\infty,1]\big) = (-\infty,1]$ *και να δείξουμε την ύπαρξη ρίζας με εφαρμογή του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα* $[0,1]$. *Πράγματι, η* f *είναι συνεχής στο* $[0,1]$ *με* $f(0)\cdot f(1) < 0$, *οπότε προκύπτει μια τουλάχιστον ρίζα* $x_1 \in (0,1)$ *η οποία λόγω της μονοτονίας της* f *είναι μοναδική.*

- $y = 0 \in [1,3] = f([1,3])$ οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_2 \in [1,3]$ με $f(x_2) = 0$,
- $y = 0 \in (-3,1] = f\big((0,1]\big)$ οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_3 \in (-3,1]$ με $f(x_3) = 0$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 6x - 12$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

και την ανίσωση: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτότητας για την f:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		∩		∪	

Παρατηρούμε ότι:

- η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,2]$
- η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο διάστημα $[2,+\infty)$
- η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_4 = 2$, δηλαδή το σημείο $K(2,f(2))$ ή $K(2,-1)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f.

Β4. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) + 1,\ (1)$.

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των f, g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ είναι αντίστοιχα:

(ε_1): $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$, (3)

(ε_2): $y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g(\xi) + g'(\xi)(x - \xi)$, (4)

Για να βρούμε το σημείο τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) από όπου προκύπτει:
$f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) = g(\xi) + g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow f(\xi) - g(\xi) = \big(g'(\xi) - f'(\xi)\big)(x - \xi)$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(\xi) - (f(\xi) + \xi) = \big(f'(\xi) + 1 - f'(\xi)\big)(x - \xi) \Leftrightarrow -\xi = x - \xi \Leftrightarrow x = 0$

Οπότε $y_0 = f(\xi) - \xi f'(\xi)$

Άρα, οι εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των f, g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B\big(\xi, g(\xi)\big)$ τέμνονται στο σημείο $M(0, y_0)$ που είναι σημείο του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x, x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Είναι:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$

$f(0) = 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Είναι:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

διότι $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Επομένως, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x \cdot \eta\mu x$

  Ισχύει ότι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, $-e^x \leq e^x \cdot \eta\mu x \leq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^x) = 0$ τότε, από κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \cdot \eta\mu x = 0$

Άρα, η $y = 0$ είναι ασύμπτωτη στο $-\infty$.

- Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$

  Άρα, $\lambda = 1$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

Άρα, $\beta = \frac{1}{2}$

Τελικά, η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$. Κατακόρυφες δεν έχει, καθώς είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Αρκεί να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-\pi, 0)$. Έστω η $\varphi(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \le 0$. Η φ συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, με

$\varphi(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$

$\varphi(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$, δηλαδή

$\varphi(0)\cdot\varphi(-\pi) < 0$

Άρα, από θεώρημα *Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi) = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει την $y = x + \frac{1}{2}$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής του $y = y(t)$ δεν ορίζεται για $x = x(t) = 0$, επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επομένως, θεωρούμε $x = x(t) > 0$.

Αρκεί να εξετάσουμε αν η εξίσωση $y'(t_0) = x'(t_0)$ έχει λύση $t_0 \ge 0$. Ισχύει ότι

$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $x(t) > 0$.

Άρα $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} \cdot \left(2x(t)\cdot x'(t) + x'(t)\right)$ οπότε

$$\frac{x'(t_0)\cdot 2x(t_0)+1}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} = x'(t_0) \overset{x'(t_0)>0}{\Longleftrightarrow} \frac{2\cdot x(t_0)+1}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} = 1 \overset{x'(t_0)>1}{\Longleftrightarrow}$$

$2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)} = 2x(t_0)+1 \Leftrightarrow 4x^2(t_0)+4x(t_0) = 4x(t_0)+1 \Leftrightarrow 0 = 1$ Αδύνατη.

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο σημείο $M\left(x(t), y(t_0)\right)$ ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{F'(x)x^{\ln x}-\left(x^{\ln x}\right)'F(x)}{\left(x^{\ln x}\right)^2}=$ $\frac{f(x)x^{\ln x}-x^{\ln x}2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot F(x)}{\left(x^{\ln x}\right)^2}=\frac{x^{\ln x}\left(f(x)-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot F(x)\right)}{x^{2\ln x}}=0$ λόγω της δεδομένης σχέσης. Επομένως από γνωστό θεώρημα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

Δ2. i) Α' τρόπος: Στην αρχική σχέση για $x=1$ έχουμε $f(1)=2F(1)\ln 1=0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $M\big(1,f(1)\big)$ είναι παράλληλη στην $y=2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1)=2$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}}=\frac{f'(1)}{1}=2$$

Αφού

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

Β' τρόπος: Στην αρχική σχέση για $x=1$ έχουμε $f(1)=2F(1)\ln 1=0$. Οπότε το όριο έχει απροσδιοριστία $0/0$ επομένως εφαρμόζοντας κανόνες DLH έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=f'(1)=2$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η

$$f'(x)=\frac{\left(2f(x)\ln x+2F(x)\cdot\frac{1}{x}-f(x)\right)}{x}$$

είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Γ' τρόπος: Έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{2F(x)\ln x}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{2F(x)}{x}=2F(1)$$

αφού η F είναι συνεχής.

Στην αρχική σχέση για $x=1$ έχουμε $f(1)=2F(1)\ln 1=0$. Επίσης παραγωγίζοντας την αρχική έχουμε:

$$f(x)+xf'(x)=2f(x)\ln x+2F(x)\cdot\frac{1}{x},x>0$$

Οπότε θέτοντας $x=1$ λαμβάνουμε: $f(1)+f'(1)=0+2F(1)\Leftrightarrow 2F(1)=f'(1)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M\big(1, f(1)\big)$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έτσι, έχουμε $2F(1) = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$.

Τελικά το αρχικό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2F(1) = 2.$$

ii) Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1)\ln 1 = 0$. Επίσης παραγωγίζοντας την αρχική έχουμε:

$$f(x) + xf'(x) = 2f(x)\ln x + 2F(x)\cdot\frac{1}{x}, x > 0$$

Οπότε θέτοντας $x = 1$ λαμβάνουμε: $f(1) + f'(1) = 0 + 2F(1) \Leftrightarrow 2F(1) = f'(1)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M\big(1, f(1)\big)$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έτσι, έχουμε $2F(1) = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$.

Β τρόπος: Η F είναι συνεχής επομένως

$$F(1) = \lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2}\cdot\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

Η συνάρτηση g είναι σταθερή επομένως υπάρχει $c \in R$ τέτοιο ώστε $g(x) = c \Leftrightarrow F(x) = cx^{\ln x}, x > 0$. Για $x = 1$ έχουμε $F(1) = c\cdot 1^0 \Leftrightarrow c = F(1) = 1$. Άρα $F(x) = x^{\ln x}, x > 0$.

Δ3. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $F'(x) = \left(e^{(\ln x)^2}\right)' = x^{\ln x} 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln x - 1}\cdot 2\ln x$. Επομένως το πρόσημο της F' εξαρτάται μόνο από το $\ln x$, δηλαδή

$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

και

$F'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \le 0$ (1)

Το $x = 1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης.

- Αν $x > 1$, τότε $x^2 > x > 1 \overset{F\uparrow}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ επομένως η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$.
- Αν $0 < x < 1$, τότε $0 < x^2 < x < 1 \overset{F\downarrow}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ επομένως η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$.

Τελικά μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι το $x = 1$.

Δ4. Έχουμε $E = \int_1^e |F(x)|\,dx$. Επίσης

$$1 \le x \le e \overset{F\uparrow}{\Rightarrow} F(1) \le F(x) \le F(e) \Rightarrow 1 \le F(x) \le e$$

και οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x = 1$, $x = e$, αντίστοιχα. Επομένως για το εμβαδόν E έχουμε

$$E = \int_1^e |F(x)|\,dx = \int_1^e F(x)\,dx = \int_1^e e^{(\ln x)^2}\,dx$$

Έχουμε $e^{(\ln x)^2} \ge \ln^2 x + 1, x > 0$ (αν θέσουμε στη γνωστή ανισότητα όπου x το $\ln^2 x$). Η ισότητα ισχύει μόνο για $\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ επομένως

$$\int_1^e e^{(\ln x)^2}\,dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1)\,dx$$

$$E > \int_1^e (\ln^2 x + 1)\,dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x\,dx + [x]_1^e = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + [x]_1^e$$

$$= (e - 0) - 2\int_1^e (x)' \cdot \ln x\,dx + (e - 1) = e - 2[x \ln x]_1^e + 2\int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx + (e - 1)$$

$$= e - 2(e - 0) + 2[x]_1^e + (e - 1) = e - 2e + 2(e - 1) + (e - 1) = 2e - 3\ \tau.\mu.$$