ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4. α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x+1)=(x+1)e^{-x}$

Θέτω όπου $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$

Άρα $f(u)=ue^{-(u-1)} \Leftrightarrow f(u)=ue^{1-u}$

Επομένως $f(x)=xe^{1-x}$, $x \in \mathcal{R}$.

B2. Η f συνεχής στο $\mathcal{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$f'(x)=(x)'e^{1-x}+x(e^{1-x})'=e^{1-x}+xe^{1-x}(1-x)'=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$, $x\in\mathcal{R}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'(x)	+	|	-
f(x)	↗		↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1e^{1-1}=1$.

B3. $f''(x)=[(1-x)e^{1-x}]'=(1-x)'e^{1-x}+(1-x)(e^{1-x})'=$

$=-e^{1-x}+(1-x)(e^{1-x})'=-e^{1-x}+(1-x)e^{1-x}(1-x)'=-e^{1-x}+(1-x)e^{1-x}(-1)=$

$=-e^{1-x}-e^{1-x}+xe^{1-x}=-2e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-2)e^{1-x}$

'Αρα $f''(x)=(x-2)e^{1-x}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow(x-2)e^{1-x}=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$

$f''(x)>0\Leftrightarrow x>2$

$f''(x)<0\Leftrightarrow x<2$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή $[2,+\infty)$.

Επειδή η f '' μηδενίζεται στο 2 και εκατέρωθέν του αλλάζει πρόσημο , το σημείο $A(2,f(2))$ είναι σημείο καμπής με $f(2)=2e^{1-2}=\frac{2}{e}$.

Άρα το σημείο $A(2,\frac{2}{e})$ είναι σημείο καμπής.

Η f είναι συνεχής στο $\mathcal{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}=0.$ 'Αρα λ=0 άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ με

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(xe)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$$

'Αρα η y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e}{e^x}=+\infty.$

Άρα δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Β4.

i)$\Delta_1=(-\infty,1]$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1 άρα $f(\Delta_1)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(1)]$

όπου f(1)=1 και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{1-x}$=$(-\infty)(+\infty)=-\infty$.

Άρα $f(\Delta_1)=(-\infty,1]$.

$\Delta_2=(1,+\infty)$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 άρα $f(\Delta_2)=(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(1))=(0,1)$

΄Αρα $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(-\infty,1]\cup(0,1)=(-\infty,1]$.

ii)Από το σύνολο τιμών της f προκύπτει ότι :

αν $\lambda\leq 0$ η εξίσωση f(x)=λ έχει μία ρίζα,

αν 0<λ<1 η εξίσωση έχει 2 ρίζες,

αν λ=1 η εξίσωση έχει μία ρίζα την x=1,

αν λ>1 η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f συνεχής στο (-∞, 0) ως πολυωνυμική .

Η f στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ έχει ελάχιστο στο π ως τριγωνική f(π)=-1

Στο χ_0= 0 έχω

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax^3-3x^2-x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu=1$$

$$f(0)=1$$

Άρα f συνεχής και στο χ_0 = 0

Τελικά f συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(ax^3-3x-1}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu-1}{x}=0$$

Αρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει , δηλ. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Γ2.

i) . η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ από Γ1

. η f παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με f'(x)=(συνχ)'=-ημχ

. $f(0)=1$

. $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$

Άρα δεν ισχύει το θεώρημα Rolle

ii) $\forall \chi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχω f'(χ)=-ημχ

f'(ξ) = 0 ⇔ -ημξ = 0 ⇔ ημξ = 0 ⇔
ημξ = ημ0 ⇔ ξ = 2κπ ή ξ = 2κπ+π
⇔ ξ κπ, κ∈Z

$0 < \xi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

$0 < \kappa\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa < \frac{3}{2}$

Αφού κ ∈ Z , κ = 1
Άρα ξ = π

Γ3.

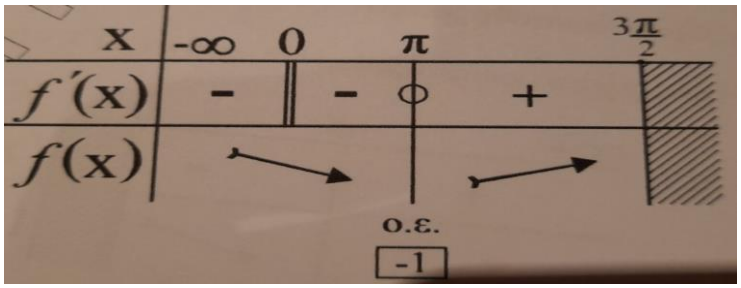
Αρκεί να δείξετε ότι η εξίσωση f'(χ) =0 δεν έχει ρίζα στο (-∞,0)
f'(χ) = 3αχ² -6-1
Δ = 36+12α
Έχω α < -3 ⇒ 12α < -36 ⇔ 36+12α < -36 + 36 ⇔ Δ < 0
Άρα η εξίσωση f'(χ) = 0 είναι αδύνατη

Γ4.

Έχω f'(χ) < 0 ∀χ∈ (-∞,0)
Αφού f'(x) έχει Δ < 0
'Αρα f γνήσιως φθίνουσα στο (-∞,0]
f'(χ) = -ημχ < 0 ∀χ∈ (0,π)
Άρα f γνησίως φθίνουσα στο [0, π]
Αφού f συνεχής στο 0 έχω f γνησίως φθίνουσα στο (-∞, π]

$f'(\chi) = -\eta\mu\chi > 0$ ∀χ∈ $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$



Η f έχει ελάχιστο στο π το $f(\pi) = -1$, άρα $f(\chi) \geq -1$, για κάθε $\chi \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση g(x)=lnx-$\frac{1}{x}$, x>0.

Η g είναι παραγωγίσιμη με g'(x)=(lnx-$\frac{1}{x}$)'=$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$>0 για κάθε x>0.

'Αρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

Η g είναι συνεχής στο [1,e].

g(1)=ln1-1=-1<0

g(e)=lne-$\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$

Επομένως g(1)g(e)<0

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε g(x_0)=0⇔lnx_0-$\frac{1}{x_0}$

Η ρίζα είναι μοναδική γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με f '(x)=[(lnx_0)(x+1)-lnx-1]'=

lnx_0(x+1)'-(lnx)'-(1)'=lnx_0-$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x\cdot x_0}$

f '(x)=0⇔$\frac{x-x_0}{x\cdot x_0}=0$⇔x-$x_0$=0⇔x=$x_0$

f '(x)>0⇔x>x_0 αφού x>0 και x_0>0.

x	0	x_0	+∞
f'(x)	|	-	+
f(x)	|	↘	↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0, το

f(x_0)= (lnx_0)(x_0+1)-lnx_0-1=$x_0$lnx_0+lnx_0-lnx_0-1=$x_0\frac{1}{x_0}$-1=1-1=0.

Δ3. $g(x)=x\cdot e^{-x}, x\in\mathbb{R}$

$h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, x\in\mathbb{R}$

Για χ < 0 , g(0) <0 και h(χ)>0. Άρα η g(χ) = h(χ) είναι αδύνατη
Για χ = 0 , g(0) = 0 και h(0) =1. Άρα g(χ) ≠ h(χ).
Για χ>0:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow \ln(x\cdot e^{-x})=\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\cdot(\ln x_0-\ln e)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\cdot(\ln x_0-1)\Leftrightarrow \ln x-x=\ln x_0\cdot(x+1)-x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0\cdot(x+1)-\ln x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$$

Από Δ2 έχω μοναδική ρίζα χ_0
Άρα έχω μοναδικό κοινό σημείο .

$$g'(x)=(x)'e^{-x}+x\cdot(e^{-x})'=e^{-x}-x\cdot e^{-x}\Rightarrow$$

$$g'(x_0)=e^{-x_0}-x_0\cdot e^{-x_0}=e^{-x_0}(1-x_0)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\cdot(x+1)'=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Rightarrow$$

$$h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(\ln x_0-1)=\frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}}\cdot(\ln x_0-1)$$

Αφού οι δύο εφαπτόμενες των δύο συναρτήσεων διέρχονται από το κοινό τους σημείο , πρέπει και

αρκεί $g'(x_0)=h'(x_0) \Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}}=\frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}}\cdot(\ln x_0-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}}=\frac{x_0^{x_0+1}}{e\cdot e^{x_0}}\cdot(\ln x_0-1) \overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{\Leftrightarrow} e(1-x_0)=x_0^{x_0}\cdot x_0\left(\frac{1}{x_0}-1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e(1-x_0)=x_0^{x_0}\cdot x_0\frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow e(1-x_0)=x_0^{x_0}\cdot(1-x_0) \overset{(1-x_0)\neq 0, a\varphi o\acute{\upsilon} x_0\in(1,e)}{\Leftrightarrow} e=x_0^{x_0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln e=\ln x_0^{x_0} \Leftrightarrow 1=x_0\cdot\ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x_0}$

Που ισχύει από Δ1

Δ4.

$A(x,f(x))$, $B(x,\varphi(x))$

$(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(\varphi(x)-f(x))^2}=$

$\sqrt{(\varphi(x)-f(x))^2}=|\varphi(x)-f(x)| \overset{f(x)>\varphi(x)}{=} f(x)-\varphi(x)$

Θεωρώ $h(x)=f(x)-\varphi(x)$

‘Εστω ότι η φ(χ) δεν είναι παραγωγίσιμη στο $χ_0$. Τότε το $χ_0$ είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Έστω ότι η φ(χ) είναι παραγωγίσιμη στο $χ_0$.

Αφού έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $χ_0$ στο οποίο η h είναι παραγωγίσιμη από θεώρημα Fermat

h’ ($χ_0$) = 0.

Έχω $h'(x_0)=f'(x_0)-\varphi'(x_0)$ οπότε $h'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=\varphi'(x_0)$.

Από Δ2 η f έχει ελάχιστο στο $χ_0$ με $f'(x_0)=0$

Άρα φ’($χ_0$)=0 δηλαδή το $χ_0$ είναι κρίσιμο σημείο της φ.